[illegible]

م 2

[illegible] نظرية الوجود :

2- وحدانية الحل :

للبرهان وحدانية الحل نفترض جدلاً أنه يوجد بالإضافة إلى الحل الذي لدينا ل(ح)
أنه يوجد حل آخر ل(ح) ويحقق نفس الشرط الابتدائية ونبين أنه ل = ل
وذلك كما يلي :

أولاً لنبرهن الفرض أن $w_1(z)$ حل آخر للمعادلة (1) حيث :

$$w_1(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(z, w_1(z))\,dz \quad \dots (10)$$

ولدينا سابقاً العلاقة (8) بالنسبة للحل $w(z)$

$$w(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(z, w(z))\,dz \quad (8)$$

نطرح (8) من العلاقة (10) :

$$w(z_1) - w(z) = \int_{z_0}^{z} [f(z, w_1) - f(z, w)]\,dz$$

بالاستفادة من شرط ليبشتز :

$$|w_1 - w| = \left| \int_{z_0}^{z} (f(z, w_1) - f(z, w))\,dz \right|$$

حسب ليبشتز :

$$\le A \int_{z_0}^{z} |w_1 - w| \, |dz| \quad \dots (11)$$

الآن إذا رمزنا بـ (E) للقيمة العظمى للفرق في المجال $|z - z_0| < \alpha$ نجد أنه بتكرار العلاقة (11) مايلي :

$$(11) \Rightarrow |w_1 - w| \le A \int_{z_0}^{z} E\,|dz| = EA|z - z_0|$$

من جديد (11) وبتعويض النتيجة الأخيرة نجد :

$$|w_1 - w| \le A \int_{z_0}^{z} (EA|z - z_0|)\,|dz| = EA^2 \int_{z_0}^{z} |z - z_0|\,|dz| =$$

$$= EA^2 \frac{|z - z_0|^2}{2!}$$

وبشكل عام :

$$|w_1 - w| \le EA^n \frac{|z - z_0|^n}{n!} \quad \dots (12)$$

وعندما تسعى $n \longrightarrow \infty$ فإن $(12) \longrightarrow 0$ وبالتالي :

$$|w_1 - w| \le 0 \Rightarrow |w_1 - w| = 0 \Rightarrow w_1 = w$$

أي أنه لا يوجد سوى حل وحيد للمعادلة التفاضلية ويأخذ القيمة w_0 عندما $z = z_0$.

تعيين الحل بطريقة النشر في متسلسلة قوى للمعادلة من الدرجة الأولى:
الحل الوحيد $w(z)$ لمسألة القيم الابتدائية السابقة [(1), (2)] يتعين من
أي دالة تحليلية في شكل متسلسلة قوى:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \ldots (*) \qquad , |z-z_0|<r$$

والمطلوب هنا لإيجاد الحل تعيين a_n في هذا النشر ويتم ذلك في طريقتين:

أ) منشور تايلور لحساب الأمثال (الطريقة الأولى):
(النشر في منشور حساب الأمثال لتايلور.)

$$\frac{dw}{dz} = w'(z) = f(z, w(z))$$

شرط حولي وإيجاد المشتقات من المراتب العليا ثم نعوضها في منشور حساب الأمثال لتايلور الذي يعطى بالشكل:

(المشتقات مأخوذة بالنسبة لـ z) $$a_n = \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!} \; ; \; n = 0, 1, \ldots$$

حيث المشتقات تكون:

$$w' = f(z, w) = f$$
$$w'' = f_z + w' \cdot f_w$$
$$w''' = f_{zz} + w' f_{zw} + w'' f_w + w' [f_{zz} + w' f_{ww}]$$
$$w''' = f_{zz} + 2w' f_{zw} + w'' f_w + w'^2 f_{ww}$$

وهكذا.....

وبتعويض $w = w_0$ عندما $z = z_0$ نطبق العلاقة:

$$a_n = \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!} \; ; \; n = 0, 1, \ldots$$

فنحصل على جميع الأمثال المطلوبة نعوضها في صيغة الحل (*) فيكون المطلوب

ب) الطريقة الثانية: (طريقة النشر والمطابقة والمنشور التدريجي لحساب الأمثال):
نأخذ بعين الاعتبار المعادلة التفاضلية (1):

$$w'(z) = f(z, w(z)) \ldots (1)$$

ونقوم أولاً بنشر الطرف الأيمن بالشكل:

$$f(z, w(z)) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} (z-z_0)^i (w-w_0)^j$$

علينا المقابل من متسلسلة الحل المفروض:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ z:

$$w' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

ومنه نحصل على المطابقة (بعد التعويض في المعادلة (1))

وبوضع المبدل (n) بـ i يكون:

$$(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i a_i (z-z_0)^{i-1} = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} (z-z_0)^i \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-z_0)^i\right)^j$$

لذا:

($w_0 = w$ عندما $z = z_0$)

ولذلك بمقارنة الأمثال على الطرفين نحصل على جميع (a_i) بمساواة تدريجية لحساب الأمثال (المعاملات):

ملاحظة:

1) إن هذه الطريقة مقبولة ومرضية لشروط الحسابات العددية.

مثال تطبيقي:

أوجد حل المعادلة:

$$w' = z^2 + w^2 \quad ...... (1)$$

والموافق للشرط: [$w = 1$ عندما $z = 0$] ...... (2)

بطريقة المتسلسلات المطابقة (الحسوب التدريجي):

الحل:

أولاً نفرض الحل بشكل متسلسلة (منشور):

$$w = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... \quad (3)$$

نشتق هذه العلاقة بالنسبة لـ z مرة واحدة ونعوض في المعادلة المعطاة (1):

$$(3)' \Rightarrow w' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1}$$

ومنه بالتعويض في (1):

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1} = z^2 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i\right)^2$$

نعوض كل a_i في الطرف الأخير للتناسق في الأدلة عند المطابقة.

$$\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)a_{i+1}z^{i} = z^2 + \sum_{i=0}^{\infty} z^{i} \cdot \sum_{j=0}^{i} a_j \cdot a_{i-j} \quad \dots (*)$$

وبالتالي بالمطابقة بين الأمثال على الطرفين :

ومن أجل $i \neq 2$ من (*) :

$$(I) \dots \quad (i+1)a_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} a_j \cdot a_{i-j} \quad ; \quad i \neq 2$$

من أجل $i=2$:

$$(II) \dots \quad 3a_3 = 1 + \sum_{j=0}^{2} a_j \cdot a_{2-j} \quad ; \quad i=2$$

من شرط البدء $w=1$ عندما $z=0$:

ومنه $w = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = a_0 + a_1 z + \dots$

$$\boxed{1 = a_0}$$

ننتقل إلى حساب الثوابت :

من (I) $\Rightarrow i=0 \Rightarrow a_1 = a_0 \cdot a_0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$

$i=1 \Rightarrow 2a_2 = a_0 \cdot a_1 + a_1 \cdot a_0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 1}$

من (II) $\Rightarrow 3a_3 = 1 + a_0 a_2 + a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_0 = 4$

$\Rightarrow a_3 = \frac{4}{3}$

وهكذا ......

$(2) \Rightarrow w(z) = 1 + z + z^2 + \frac{4}{3}z^3 + \dots\dots$

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية (نظرية الوجود) :

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية تكتب بالشكل :

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

حيث هذه الأمثال [$p(z)$ و $q(z)$] دوال تحليلية من المتحول العقدي z

w' و w'' هما مشتقا الدالة المجهولة w بالنسبة للمتحول العقدي z

ولنفرض هنا أن لدينا الشروط الابتدائية كما يلي :

$$[\, w|_{z=z_0} = c_0 \ , \ w'|_{z=z_0} = c_1 \,] \quad \dots (2)$$

(الشروط الابتدائية هي n حيث n رتبة المعادلة)

ولنفرض أن $p(z)$ و $q(z)$ تحليليتان منتظمتان (هولومورفيتان) في الدائرة $|z-z_0|<R$ ولنبين أنه يوجد داخل هذه الدائرة حل المعادلة (1) [دالة منتظمة] يحقق الشرطين (2).

ومن أجل ذلك نفرض أن $\frac{dw}{dz}=u$ دالة مجهولة جديدة عندئذ يمكن كتابة المعادلة (1) على شكل جملة معادلتين من المرتبة الأولى:

$$\begin{cases} \frac{du}{dz}=-p(z)\,u-q(z)\,w \\ \frac{dw}{dz}=u \end{cases}$$

ومن أجل تناظر الدساتير فإننا سنبحث في الحالة العامة لجملة معادلتين خطيتين:

$$\left\{ \frac{du}{dz}=a(z)\,u+b(z)\,u \quad ; \quad \frac{dv}{dz}=c(z)\,v+d(z)\,v \right\} \quad \ldots (3)$$

ونبين أنه لهذه الجملة حل منتظم داخل الدائرة $|z-z_0|<R$ محققاً شروط الابتدائية بالشكل:

$$\left[u|_{z=z_0}=\alpha \ , \ v|_{z=z_0}=\beta \right] \ldots (4)$$

وكذلك نشترط أن تكون أمثال الجملة (3) هي دوال منتظمة داخل الدائرة المذكورة (a,b,c,d)

ولهذه الغاية نستخدم طريقة التقريبات المتتالية التي سبق واستخدمناها في الحالة السابقة من المرتبة الأولى.

إذا كانت أمثال المعادلة (1) دوال منتظمة في الدائرة $|z-z_0|<R$ فإنه يوجد في هذه الدائرة حل وحيد للمعادلة (1) ويحقق شروط (2) مهما كانت قيم الثابتين المفروضين α و β وهذا الحل يكون:

$$w=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

مثال تطبيقي : مسألة الحل :

لدينا المعادلة التفاضلية :

$$w' = z^2 + w^3 \quad \ldots\ (1)$$

$$[\, w(0) = 1 \quad z = 0 \text{ عندما } \,]$$

[ملاحظة: الملاحظة الشرط مستخدم دستور تايلور لحساب المعاملات]

الحل:

بما أن z_0 هي داخلية وكما تعلمنا في المرحلة النظرية فإن المسألة (1) و (2)

لها حل تحليلي وحيد ويكتب بالشكل :

$$\left[\, w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(0)}{n!} z^n \,\right] \quad \ldots\ (2) \quad ; \quad z_0 = 0$$

حيث لدينا أن :

$$a_n = \frac{w^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{[دستور تايلور لحساب الأمثال]}$$

$$\boxed{w(0) = 1}$$

$$w'(0) = (0)^2 + (1)^3 = 1 \Rightarrow \boxed{w'(0) = 1}$$

$$w'' = 3z^2 + 3w^2 w' \Rightarrow \boxed{w''(0) = 3}$$

$$w''' = 6z + 6ww'^2 + 3w^2 w'' \Rightarrow w'''(0) = 6 + 9 \Rightarrow \boxed{w'''(0) = 15}$$

وهكذا ....

ولدينا الحل على شكل سلسلة نشر :

$$w(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

من دستور حساب المعاملات : $a_n = \frac{w^{(n)}(0)}{n!}$ ؛

$$a_0 = w(0) = 1$$

$$a_1 = \frac{w'(0)}{1!} = 1$$

$$a_2 = \frac{w''(0)}{2!} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{w'''(0)}{3!} = \frac{15}{3!} = \frac{5}{2}$$

$$w = 1 + z + \frac{3}{2} z^2 + \frac{5}{2} z^3 + \ldots$$

وظيفة : أوجد حل المسألة التفاضلية :

$$w' = e^z + z \cos w \quad \ldots\ (1) \qquad w(0) = 0 \quad \ldots\ (2)$$

بطريقة دستور تايلور لحساب الأمثال.